ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

oOo

LÊ THỊ THU

PHƯƠNG PHÁP LẶP GIẢI MỘT LỚP BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TÁCH HAI CẤP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, NĂM 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

LÊ THỊ THU

PHƯƠNG PHÁP LẶP GIẢI MỘT LỚP BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TÁCH HAI CẤP

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 8460112

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học
PGS.TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY

THÁI NGUYÊN, NĂM 2020

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Trong quá trình học tập và thực hiện luận văn này, Trường Đại học Khoa học đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tôi được tham gia học tập, nghiên cứu. Tôi xin trân thành cảm ơn Ban Giám hiệu nói chung và Quý thầy cô trực tiếp giảng dạy lớp Cao học Toán K12A (khóa 2018–2020) đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo mọi điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Để hoàn thành luận văn một cách hoàn chỉnh, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ tận tình của PGS.TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY. Tôi xin tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến cô và xin gửi lời tri ân sâu sắc của tôi đối với những điều cô đã làm cho tôi trong suốt quá trình thực hiện luận văn.

Tôi xin gửi lời cảm ơn trân thành tới gia đình, bạn bè, những người đã luôn đồng hành, động viên, tạo điều kiện cho tôi suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 28 tháng 6 năm 2020

Tác giả luận văn

Lê Thị Thu

Bảng ký hiệu

$\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$	các không gian Hilbert thực
C, Q	các tập con lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert
F	ánh xạ đơn điệu
F_1	ánh xạ giả đơn điệu trên C
F_2	ánh xạ giả đơn điệu trên Q
A	toán tử tuyến tính bị chặn
A^*	toán tử liên hợp của toán tử A
X, Y	các không gian tuyến tính định chuẩn
Ω_1, Ω_2	các tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân
P_{Ω_1}	phép chiếu mêtric lên Ω_1
P_{Ω_2}	phép chiếu mêtric lên Ω_2
Γ	tập nghiệm của SFP
$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}^N$	không gian Euclid thực N chiều
$x^k \to x^*$	dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh về x^*
$x^{k_i} \rightharpoonup \bar{x}$	dãy $\{x^{k_i}\}$ hội tụ yếu đến $\bar{x}$

Chữ viết tắt

VIP(F, C)	bài toán bất đẳng thức biến phân (Variational Inequality Problem) với ánh xạ giá F và tập ràng buộc C
Sol(F, C)	tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân VIP(F, C)
SFP	bài toán chấp nhận tách (Split Feasibility Problem)
SVIP	bài toán bất đẳng thức biến phân tách (Split Variational Inequality Problem)
BVIP	bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp (Bilevel Variational Inequality Problem)
BSVIP	bài toán bất đẳng thức biến phân tách hai cấp (Bilevel Split Variational Inequality Problem)

Mở đầu

Cho C và Q lần lượt là các tập con lồi đóng khác rỗng trong các không gian Hilbert thực $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$. Giả sử $A : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ là một toán tử tuyến tính bị chặn và các ánh xạ $F_1 : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ và $F_2 : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_2$. Bài toán bất đẳng thức biến phân tách (Split Variational Inequality Problem) là bài toán tìm nghiệm x^* của một bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian $\mathcal{H}_1$ sao cho ảnh $y^* = Ax^*$, qua toán tử tuyến tính bị chặn A, là nghiệm của một bài toán bất đẳng thức biến phân khác trong không gian $\mathcal{H}_2$. Cụ thể,

$$\text{Tìm } x^* \in C : \quad \langle F_1(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C \tag{1}$$

sao cho

$$y^* = Ax^* \in Q : \quad \langle F_2(y^*), y - y^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in Q. \tag{2}$$

Ký hiệu tập nghiệm của các bài toán bất đẳng thức biến phân (1) và (2) lần lượt là Ω_1 và Ω_2 thì bài toán bất đẳng thức biến phân tách là bài toán

$$\text{Tìm } \ x^* \in \Omega_1 \ \text{ sao cho } \ Ax^* \in \Omega_2. \tag{3}$$

Bài toán (3) là một dạng của bài toán chấp nhận tách (Split Feasibility Problem). Bài toán chấp nhận tách xuất hiện trong những mô hình thực tế, chẳng hạn mô hình IMRT (Intensity–Modulated Radiation Therapy) trong bức xạ trị liệu yêu cầu tìm nghiệm của một bài toán trong không gian này sao cho ảnh của nó qua một toán tử tuyến tính bị chặn là nghiệm của một bài toán trong không gian khác. Bài toán chấp nhận tách trong các không gian Hilbert hữu hạn chiều được giới thiệu lần đầu tiên bởi Yair Censor và Tommy Elfving [6].

Luận văn xét bài toán bất đẳng thức biến phân tách hai cấp (Bilevel Split

Variational Inequality Problem)

$$\text{Tìm } x^* \in \Omega : \quad \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Omega, \tag{4}$$

trong đó $F : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ là một ánh xạ, $\Omega = \{x^* \in \Omega_1 : Ax^* \in \Omega_2\}$ là tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân tách (3).

Nội dung của đề tài luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 "Bài toán bất đẳng thức biến phân tách" trình bày một số kiến thức cơ bản về không gian Hilbert thực cùng các toán tử trong không gian này (toán tử chiếu, ánh xạ đơn điệu, ánh xạ liên tục Lipschitz...); giới thiệu về bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp, bài toán bất đẳng thức biến phân tách và một số kết quả liên quan.

Chương 2 "Phương pháp chiếu giải một lớp bất đẳng thức biến phân tách hai cấp" trình bày một phương pháp lặp giải bài toán bất đẳng thức biến phân tách hai cấp, chứng minh sự hội tụ của phương pháp và đưa ra ví dụ số minh họa cho sự hội tụ của phương pháp.

Chương 1

Bài toán bất đẳng thức biến phân tách

Chương này trình bày khái quát về không gian Hilbert thực và bài toán bất đẳng thức biến phân tách hai cấp trong không gian Hilbert. Nội dung của chương được viết thành hai mục. Mục 1.1 trình bày một số kiến thức cơ bản của không gian Hilbert thực cùng khái niệm về toán tử chiếu, ánh xạ đơn điệu, liên tục Lipschitz trong không gian Hilbert. Mục 1.2 giới thiệu về bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp, bài toán bất đẳng thức biến phân tách cùng một số kết quả liên quan đến các bài toán này. Nội dung của chương được viết trên cơ sở tổng hợp các kiến thức trong [1], [2], [5] và [7].

1.1 Một số toán tử trong không gian Hilbert

Cho $\mathcal{H}$ là một không gian Hilbert thực với tích vô hướng và chuẩn được ký hiệu tương ứng là $\langle ., . \rangle$ và $\|.\|$.

1.1.1 Một số tính chất của không gian Hilbert

Định lý 1.1.1 (xem [1]). *Cho $\mathcal{H}$ là một không gian Hilbert thực. Khi đó,*

(i) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ *với mọi* $x, y \in \mathcal{H}$ *(bất đẳng thức Cauchy–Schwartz);*

(ii) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ *(đẳng thức hình bình hành);*